

УДК 551.46

ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ ПРОХОЖДЕНИЕМ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ В РАМКАХ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ГРИНА–НАГДИ© 2015 г. Е. Н. Пелиновский, К. И. Кузнецов,
Дж. Тубуль (J. Touboul), А.А. Куркин

Представлено академиком РАН Г.С. Голицыным 24.09.2014 г.

Поступило 07.10.2014 г.

DOI: 10.7868/S0869565215100114

На практике расчет донного давления, вызванного морскими волнами (как и обратная задача восстановления поля морских волн по показаниям донных датчиков), выполняется в рамках линейной теории. В соответствии с ней, используя спектральный подход, легко найти однозначную связь между колебаниями уровня моря и вариациями донного давления [1–4]. В результате давление на дне становится полностью определенным при известных характеристиках морских волн. Однако линейная теория интуитивно хорошо работает лишь в случае небольшой амплитуды волн, когда же волнение приобретает нерегулярный и нелинейный характер, как, например, в случае штормового волнения, полагаться на линейную теорию некорректно. Так, в работе [1] показано, что предсказания линейной теории при решении обратной задачи отличаются от измеренных в лабораторных условиях на 15–20%, и это отличие связывается с нелинейностью и шумами приборов.

Сравнительно недавно начались расчеты донного давления при прохождении установившихся (прогрессивных) периодических и уединенных волн в рамках полно нелинейных уравнений Эйлера [5, 6]. Однако уравнения, полученные в этих работах, являются громоздкими и не простыми для их решения. Главная трудность в решении подобных нелинейных задач связана с принципиальной неоднородностью нелинейной краевой задачи. Однако для описания волнового поля в

прибрежной зоне можно успешно применять приближенные нелинейные уравнения Буссинеска. Такой является система уравнений Грина–Нагди [7], которая не включает вертикальной координаты [8–12]. В рамках этой системы давление на дно связано с колебаниями морской поверхности относительно простыми выражениями. Здесь мы сопоставляем формулы линейной теории с предсказаниями в рамках системы Грина–Нагди для донного давления, вызванного прохождением уединенной волны (солитона) большой амплитуды.

МОДЕЛЬ ГРИНА–НАГДИ

Воспроизведем кратко основные уравнения модели Грина–Нагди для волн, распространяющихся в одном направлении:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[Hu] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = D\{H, u\}, \quad (2)$$

где $H(x, t)$ – полная глубина водного потока $H = h + \eta(x, t)$, h – невозмущенная глубина бассейна, $\eta(x, t)$ – колебания уровня воды, $u(x, t)$ – усредненная по глубине скорость волнового течения, g – ускорение силы тяжести, D – функционал, определяющий влияние дисперсии,

$$D = -\frac{1}{3H} \frac{\partial}{\partial x} \left[H^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right]. \quad (3)$$

Важно подчеркнуть, что при выводе (1)–(3) использовано только приближение слабой дисперсии, в то же время нелинейность может быть произвольной. Приведем также выражение для донного давления в рамках модели Грина–Нагди [13, 14]:

$$\frac{p(x, t)}{\rho} = gH(x, t) - \frac{H^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (4)$$

*Институт прикладной физики**Российской Академии наук, Нижний Новгород**E-mail: pelinovsky@gmail.com**Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева**Российский университет дружбы народов, Москва**Институт морской геологии и геофизики**Дальневосточного отделения РАН, Южно-Сахалинск**University de Toulon, La Garde, France**Aix Marseille University, Marseille, France*

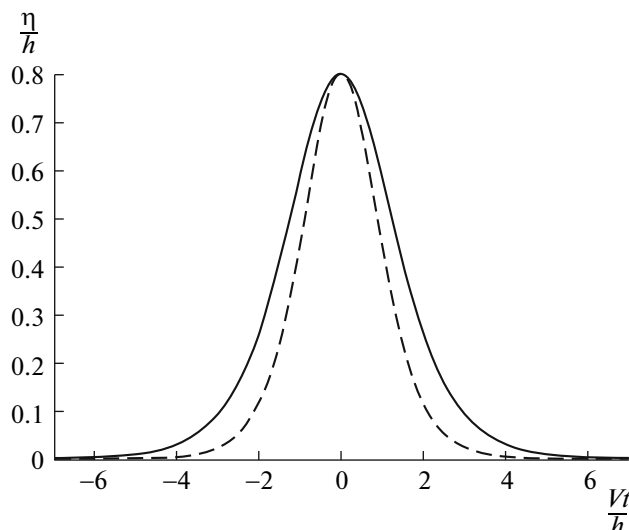


Рис. 1. Форма солитона в моделях Грина–Нагди (сплошная кривая) и Кортевега–де Вриза (штриховая).

где ρ – плотность воды. Последнее слагаемое в (4) и характеризует негидростатическую поправку в давлении, связанную с нелинейной дисперсией.

ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ В ПРОГРЕССИВНОЙ ВОЛНЕ

Как видно из (3), для определения давления необходимо знать поле смещений водной поверхности и скоростей. Между тем в бегущей (прогрессивной) волне с постоянной скоростью V поле скоростей легко находится из (1):

$$u(x - Vt) = V \frac{H(x - Vt) - h}{H} = V \frac{\eta(x - Vt)}{H}, \quad (5)$$

где мы наложили естественное условие отсутствия течения вне волны. Кроме того, в выражении для донного давления (4) можно заменить пространственную производную на временную и обратно ($\frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{\partial}{\partial x}$). В результате донное давление может быть выражено только через колебания уровня воды и ее временные производные:

$$\frac{p(x - Vt)}{\rho} = gH(x - Vt) - \frac{h^2}{2H^2} \left[-H \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (6)$$

$$\zeta(\tau) = a' \operatorname{sech}^2 \tau - \frac{3a^2 \operatorname{sech}^2 \tau [1 + a \operatorname{sech}^2 \tau] [1 - 3 \operatorname{sech}^2 \tau \sinh^2 \tau] + 3a^3 \operatorname{sech}^6 \tau \sinh^2 \tau}{2[1 + a \operatorname{sech}^2 \tau]^2}, \quad (12)$$

где $\zeta = \frac{\xi}{h}$ и $a = \frac{A}{h}$. Данное распределение показано на рис. 2 для солитона почти предельной высоты ($a = 0.8$). Как видим, кривая давления одnogорба и

так что связь между уровнем воды и давлением становится однотоочечной.

Удобно представить формулу (6) в “квазистатическом” виде

$$p(x - Vt) = \rho g [h + \xi(x - Vt)], \quad (7)$$

где эквивалентное “смещение” описывает волновую поправку к невозмущенному гидростатическому давлению

$$\xi = \eta + \frac{h^2}{2gH^2} \left[H \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right], \quad H = h + \eta. \quad (8)$$

Подчеркнем, что формула (8) справедлива для любых прогрессивных волн: кноидальных и уединенных; она не содержит неизвестной скорости распространения волны и легко может быть применена к анализу реальных данных.

ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ, ВЫЗВАННОЕ ПРОХОЖДЕНИЕМ СОЛИТОНА

Замечательным свойством системы Грина–Нагди является существование простой формы точного решения в виде бегущей уединенной волны (солитона):

$$\eta(x - Vt) = A \operatorname{sech}^2 \left[\frac{B(x - Vt)}{h} \right], \quad (9)$$

$$B = \sqrt{\frac{3A}{4(h + A)}}, \quad V = c \sqrt{1 + \frac{A}{h}}, \quad c = \sqrt{gh}. \quad (10)$$

Формально это решение получается для произвольной амплитуды солитона A , но как известно из более общих теорий, солитон существует при условии $A < 0.8h$; более точные условия приведены, например, в [13]. Мы будем использовать здесь в качестве верхней границы амплитуды $0.8h$. Стоит отметить, что в приближении малых амплитуд солитон Грина–Нагди переходит в солитон Кортевега–де Вриза. При больших амплитудах солитон Грина–Нагди несколько шире солитона Кортевега–де Вриза и имеет меньшую скорость течения (рис. 1).

Учитывая аргумент солитона в (9), удобно ввести безразмерное время

$$\tau = \frac{VBt}{h}. \quad (11)$$

Тогда временное распределение донного давления солитона (9) в рамках модели Грина–Нагди легко аналитически рассчитывается из (8):

почти повторяет форму солитона поверхностных волн, его эффективная амплитуда ниже амплитуды солитона, а временная длительность больше.

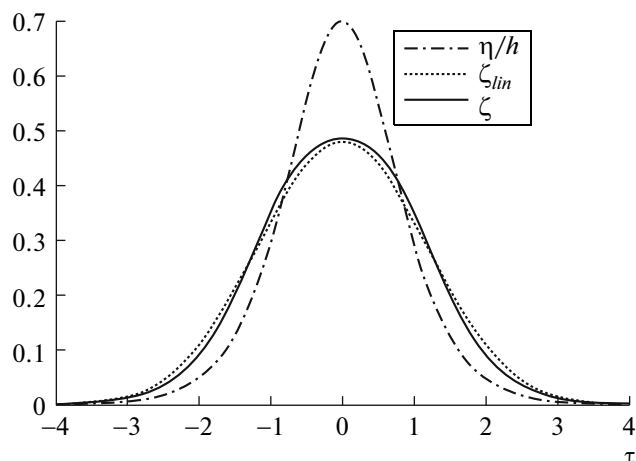


Рис. 2. Расчеты донного давления в рамках модели Грина–Нагди (сплошная кривая) и в рамках линейной теории (пунктирная линия). Штриховой линией показана форма солитона с относительной амплитудой 0.8.

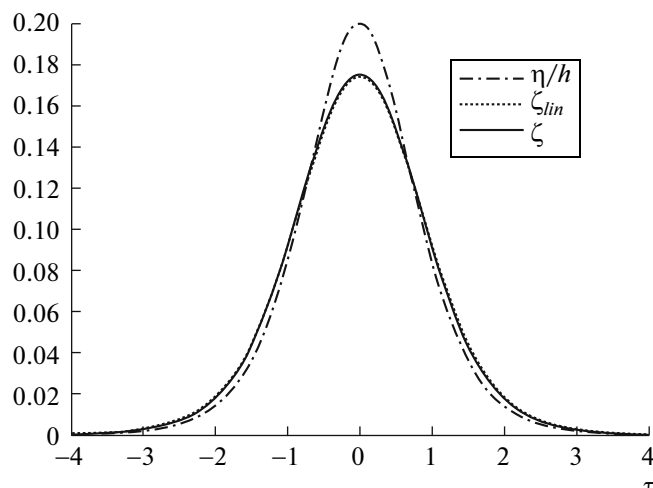


Рис. 3. Результаты расчетов по линейной теории и теории Грина–Нагди для солитона малой амплитуды ($a = \frac{A}{h} = 0.2$).

ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

Сопоставим теперь результаты расчетов с предсказаниями линейной дисперсионной теории волн на воде. В рамках линейной теории легко получить связь между колебаниями водной поверхности и донным давлением [1–4]

$$\zeta_{lin} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\omega) \exp(i\omega t) \frac{d\omega}{\cosh[k(\omega)h]}, \quad (13)$$

где $\eta(\omega)$ – временной фурье-спектр колебаний свободной поверхности, и волновое число $k(\omega)$ рассчитывается из дисперсионного соотношения для линейных волн на воде

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kh)}. \quad (14)$$

Рисунок 2 позволяет сопоставить расчеты по линейной и нелинейной теории для волны большой амплитудой ($a = \frac{A}{h} = 0.8$). Как видим, линейная теория также предсказывает солитоноподобную форму вариаций давления, и их величина практически не отличается от результатов нелинейной теории даже в сильно нелинейном случае.

На рис. 3 представлены результаты аналогичных расчетов для солитона с малой амплитудой ($a = \frac{A}{h} = 0.2$). Как и следовало ожидать, разница между линейными и нелинейными расчетами стала незначительной, так что разница между кривыми не видна.

Нелинейная теория Грина–Нагди достаточно хорошо описывает волны большой амплитуды (вплоть до предельных амплитуд) в прибрежной зоне, и это неоднократно отмечалось в литерату-

ре. В ее рамках удается рассчитать донное давление, вызванное прохождением уединенной волны (солитона). Как оказалось, расчеты донного давления, выполняемые в рамках линейной теории с использованием точного дисперсионного соотношения для волн на воде, приводят к близким результатам. Таким образом, можно сделать вывод, что линейная теория, широко используемая в океанологической практике, может применяться для расчетов донного давления, вызванного бегущими волнами большой амплитуды.

Частично результаты получены в НГТУ им. П.Е. Алексеева в рамках реализации ФЦП “Исследования и разработки по приоритетным направлениям научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы”, соглашение № 14.574.21.0089 (идентификатор – RFMEFI57414X0089) для АК; в рамках грантов РФФИ (14-05-00092 и 14-05-91370) для ЕП; стипендии Президента Российской Федерации молодым ученым и аспирантам (СП-1763.2013.5) для КК. J. Touboul благодарен French DGA рза поддержку через грант (ANR-13-ASTR-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bishop C.T., Donelan M.A. // Coastal Eng. 1987. V. 11. № 4. P. 309–328.
2. Заславский М.М., Красицкий В.П. // Океанология. 2001. Т. 41. № 2. С. 195–200.
3. Tsai C.-H., Huang M.C., Young F.J., Lin Y.C., Li H.W. // Ocean Eng. 2005. V. 32. P. 1247–1259.
4. Кузнецов К.И., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Ковалев П.Д. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. № 2. С. 242–250.

5. *Constantin A., Escher J., Hsu H.-C.* // Arch. Ration. Mech. and Anal. 2011. V. 201. P. 251–269.
6. *Deconink B., Olivears K.L., Vasan V.* // J. Nonlin. Math. Phys. 2012. V. 19. P. 1240014-1-11.
7. *Green A.E., Naghdi P.M.* // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. P. 237–246.
8. *Железняк М.И., Пелиновский Е.Н.* В кн.: Накат цунами на берег. Горький: ИПФ АН СССР, 1985. С. 8–33.
9. *Макаренко Н.И.* Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1986. В. 77. С. 56–72.
10. *Camassa R., Holm D.D., Levermore C.D.* // Physica D. 1996. V. 98. P. 258–286.
11. *Alvarez-Samaniego B., Lannes D.* // Invent. Math. 2008. V. 171. P. 485–541.
12. *Федотова З.И., Хакимзянов Г.С.* // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17. С. 94–109.
13. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
14. *Touboul J., Pelinovsky E.* // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2014. V. 48. P. 13–18.