

УДК 551.466.8,532.5;

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УЕДИНЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОМ ОКЕАНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

© 2015 г. Т. Г. Талипова*, **, О. Е. Куркина**, ***, Е. А. Рувинская**, Е. Н. Пелиновский*–***

* *Институт прикладной физики РАН*

603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46

** *Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева*

603950 Нижний Новгород, ул. Минина, 24

*** *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики*

603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12

E-mails: tgalipova@mail.ru, pelinovsky@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2013 г., после доработки 09.10.2013 г.

Распространение внутренних солитонов умеренной амплитуды в двухслойном океане переменной глубины исследуется в рамках уравнений Гарднера и Эйлера. Аналитическое решение получено с использованием асимптотических разложений по малому параметру – уклону дна. Теоретические результаты сопоставляются с результатами численного моделирования. Обсуждается возможность сохранения солитонной формы импульса по мере его распространения. Получено, что с увеличением начальной амплитуды импульс быстрее отклоняется от солитонной формы.

Ключевые слова: внутренние волны, двухслойный океан, уравнения Эйлера, уравнение Гарднера, солитон.

DOI: 10.7868/S0002351515010101

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия в прибрежной зоне очень часто наблюдалась смена полярности уединенной внутренней волны – солитона. Это явление наблюдалось в восточной части Средиземного моря [1], на северо-западном шельфе Австралии [2], в Южно-Китайском море во время эксперимента ASIAEX [3–11], в заливе Нью-Джерси [12, 13] в заливе святого Лаврентия [14], на шельфе Камчатки [15] и других акваториях. Оно обусловлено сменой знака квадратичной нелинейности внутренней волны вследствие как переменной по горизонтали плотностной стратификации жидкости, так и уменьшающейся глубины при распространении волны к берегу. Изменение знака солитона неоднократно моделировалось в рамках нелинейных эволюционных уравнений типа Кортевега–де Вриза и его обобщений для различных регионов Мирового океана [2, 5, 16–18]. Численное моделирование в рамках уравнений Эйлера также подтверждает смену полярности солитона, например, в Андаманском море [19], в озере Констанс [20], и хорошо описывает наблюдения в заливе святого Лаврентия [14].

Вне зоны смены знака квадратичной нелинейности адиабатическая трансформация солитона

внутренней волны в теории рассматривается обычно, когда параметры океана меняются настолько плавно, что солитон в каждый момент сохраняет свою форму, а меняется только его амплитуда и длина. Перестройка солитона внутренней волны на различных шельфах Мирового океана изучается в рамках уравнения Гарднера в работах [17, 18, 21–23], позволяя найти связь амплитуды солитона с локальными параметрами среды. Расчеты показывают, что адиабатическая трансформация солитона может происходить на значительных участках шельфа, где нелинейность не меняет знак, а изменение параметров среды достаточно плавное [17, 18]. Численное интегрирование нелинейных уравнений Эйлера для внутренних волн на шельфе Орегона в рамках эксперимента CODE также дает пример адиабатического распространения солитона [24].

Подробный анализ процесса смены полярности солитона при изменении только знака квадратичной нелинейности был сделан в работах [21, 22, 25, 26], а при изменении только кубической нелинейности – в работе [27]. В этих работах хорошо показана область, где вследствие смены знака нелинейности солитон теряет свою форму,

и дальнейшая трансформация идет не по адиабатической теории.

Однако плавность изменения параметров среды и удаленность от точек смены знака нелинейности являются необходимыми, но не достаточными условиями адиабатического распространения солитонов. В настоящей работе проводится детальное исследование процесса трансформации солитона внутренней волны в двухслойном океане с линейно плавно изменяющейся глубиной. Аналитические результаты, полученные в рамках асимптотической теории, сопоставляются с полученными численно в рамках уравнения Гарднера и уравнений Эйлера. Целью этого анализа является выяснение диапазона применимости асимптотической модели и определение дополнительных условий адиабатической трансформации солитона. Теория адиабатической трансформации солитона в неоднородном океане описана в разделе 1. Данные численных расчетов приведены в разделе 2. Полученные результаты суммированы в Заключение. Численные модели представлены в Приложении.

1. УРАВНЕНИЕ ГАРДНЕРА В ГОРИЗОНТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ, АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Динамика длинных нелинейных внутренних волн умеренной амплитуды в двухслойном океане переменной глубины описывается обобщенным уравнением Гарднера [2, 16, 28]

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\alpha(x)Q(x)}{c^2(x)} \xi + \frac{\alpha_1(x)Q^2(x)}{c^2(x)} \xi^2 \right) \frac{\partial \xi}{\partial s} + \frac{\beta(x)}{c^4(x)} \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} = 0. \tag{1}$$

Это уравнение написано для модифицированного смещения границы раздела слоев

$$\xi(s, x) = \frac{\eta(s, x)}{Q(x)},$$

где η есть смещение границы раздела. Входящие сюда параметры задаются аналитическими выражениями

$$\begin{aligned} c(x) &= \sqrt{\frac{g\Delta\rho}{\rho} \frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)}}, \quad s = \int \frac{dx}{c(x)} - t, \\ \alpha(x) &= \frac{3c h_1 - h_2(x)}{2 h_1 h_2(x)}, \quad \beta(x) = \frac{c h_1 h_2(x)}{6}, \\ \alpha_1(x) &= -\frac{3c}{8h_1^2 h_2^2(x)} (h_1^2 + h_2^2(x) + 6h_1 h_2(x)), \\ Q(x) &= \left(\frac{h_{20} h_1 + h_2(x)}{h_1 h_1 + h_{20}} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Символ “0” здесь обозначает стартовую точку, откуда распространяется волна. Верхний слой имеет

постоянную толщину h_1 , а глубина нижнего слоя переменная, $h_2(x)$, $\Delta\rho/\rho$ – скачок плотности на границе раздела, g – гравитационное ускорение.

Как легко видеть, коэффициент квадратичной нелинейности α меняет знак в точке, где толщины слоев становятся одинаковыми, а коэффициент кубической нелинейности α_1 всегда отрицательный. Отметим, что уравнение Гарднера (1) с переменными коэффициентами не является интегрируемым, но имеет два важных интеграла сохранения:

потока массы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(s, x) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t, x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t, 0) dt \tag{2}$$

и потока энергии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2(s, x) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2(t, x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta^2(t, 0) dt. \tag{3}$$

В случае, когда глубина океана меняется медленно, то в первом приближении солитон описывается выражением

$$\xi_s = \frac{A}{1 + Bch[\gamma(s - \kappa x)]}, \tag{4}$$

где параметры A, B, κ и γ связаны между собой

$$A = \frac{6\beta\gamma^2}{Q\alpha c^2}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\alpha^2 c^2}{6\alpha_1 \beta} (B^2 - 1)}, \quad \kappa = \frac{\beta\gamma^2}{c^4}. \tag{5}$$

Амплитуда солитона a есть

$$a = \frac{QA}{(1 + B)} = \frac{Q\alpha}{\alpha_1} (B - 1). \tag{6}$$

Форма солитона (4) зависит только от одного параметра (амплитуды): при малых амплитудах форма солитона близка к форме солитона уравнения Кортевега–де Вриза, а при больших амплитудах ($B \rightarrow 0$) солитон стремится к предельному, так называемому “толстому” солитону, амплитуда которого есть

$$A_{lim} = -\frac{Q\alpha}{\alpha_1}. \tag{7}$$

Здесь параметры солитона зависят от локальной глубины бассейна, а его амплитуда произвольна. Изменение амплитуды солитона с глубиной можно найти аналитически, используя закон сохранения потока энергии (3) [17, 29].

$$E(x) = \frac{1}{Q^2 c} \sqrt{\frac{\alpha^2 \beta}{|\alpha_1|^3}} \left(2 \operatorname{arctgh} \sqrt{\frac{1-B}{1+B}} - \sqrt{1-B^2} \right) = E(x_0),$$

откуда получаем следующее трансцендентное уравнение относительно параметра $B(x)$, непосредственно связанного с амплитудой волны (6):

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{(\alpha(x))^2 \beta(x)}{|\alpha_1(x)|^3}} \frac{1}{(Q(x_0, x))^2 c(x)} \times \\ & \times \left(2 \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{1-B(x)}{1+B(x)}} \right) - \sqrt{1-(B(x))^2} \right) = \\ & = \sqrt{\frac{(\alpha(x_0))^2 \beta(x_0)}{|\alpha_1(x_0)|^3}} \frac{1}{(Q(x_0, x_0))^2 c(x_0)} \times \\ & \times \left(2 \operatorname{arcth} \left(\sqrt{\frac{1-B(x_0)}{1+B(x_0)}} \right) - \sqrt{1-(B(x_0))^2} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда можно найти значение амплитуды солитона в любой точке x . Следует отметить, что ширина солитона γ (5) для уравнения Кортевега–де Вриза (малые амплитуды) стремится к бесконечности при стремлении амплитуды к нулю. С ростом амплитуды солитон становится более “гарднеровским”, и его ширина сначала падает, а потом растет и стремится также к бесконечности при стремлении амплитуды толстого солитона к предельной амплитуде (13). Уже отсюда ясно, что в предельных случаях малой и большой амплитуды, когда ширина солитона велика, асимптотическая теория не должна работать. Условием асимптотической теории является малость ширины солитона (на самом деле длины нелинейности) по сравнению с характерным изменением глубины.

Для построения конкретных зависимостей рассмотрим трансформацию длинных уединенных внутренних волн умеренной амплитуды в конкретном численном лотке с двухслойной стратификацией и пологим дном (рис. 1). Длина наклонной части лотка 57 км, полная глубина бассейна меняется от $H_0 = 100$ м до $H_1 = 43$ м, уклон дна $k = 0.001$, граница раздела двухслойной жидкости (пикноклин) находится на глубине $h_1 = 30$ м от поверхности. Перепад плотности $\Delta\rho/\rho$ составляет 0.01. Точкой переворота является точка, где коэффициент квадратичной нелинейности обращается в ноль (на расстоянии 40 км, где полная глубина равна 60 м). На больших глубинах коэффициент квадратичной нелинейности отрицателен, а на малых – положителен.

Зависимость коэффициентов уравнения (1) от координаты x представлена на рис. 2. Все коэффициенты меняются достаточно плавно и монотонно. Зависимость ширины солитона уравнения Гарднера от его амплитуды показана на рис. 3. Точками показаны соотношения длины и амплитуды солитонов, динамика которых моделируется в настоящей работе. Для выбранных солитонов ($a = 3.3$ м, $\lambda = 403.2$ м; $a = 7.3$ м, $\lambda = 311.2$ м; $a = 9.7$ м, $\lambda = 298.6$ м; $a = 12.9$ м, $\lambda = 309.2$ м; $a = 17.5$ м, $\lambda = 453.6$ м) в рам-

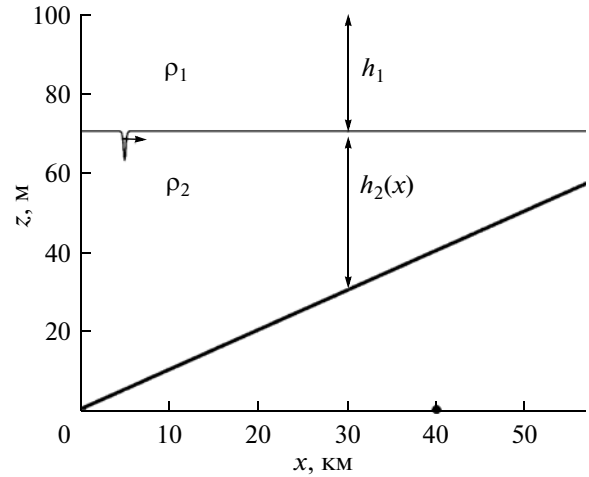


Рис. 1. Схема задачи.

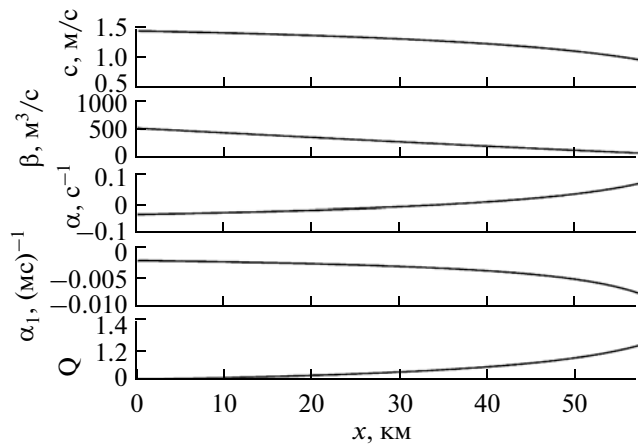


Рис. 2. Изменение коэффициентов модели с расстоянием.

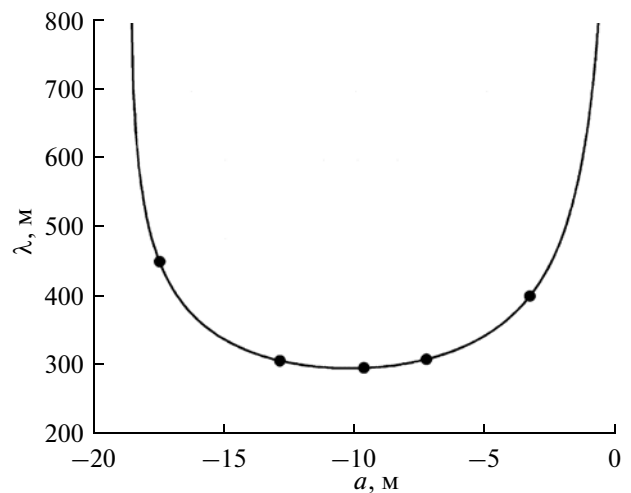


Рис. 3. Кривая зависимости ширины солитона уравнения Гарднера от его амплитуды.

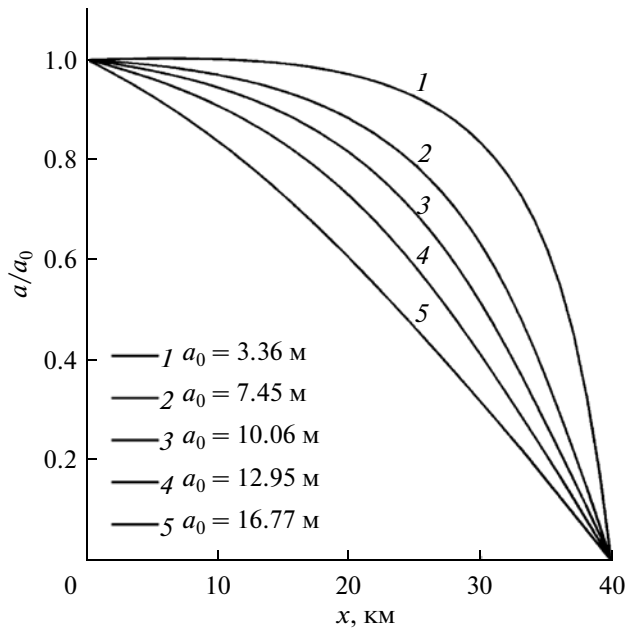


Рис. 4. Зависимость безразмерной амплитуды a/a_0 от расстояния x в рамках адиабатической теории.

ках адиабатической теории (8) построено семейство кривых, описывающих зависимость безразмерной амплитуды a/a_0 (отношение амплитуды перестраивающегося солитона в точке x к амплитуде первоначального солитона) от расстояния x до точки переворота (рис. 4).

Следует отметить, что длины выбранных начальных солитонов составляют не более одного процента от расстояния до точки переворота, т.е. адиабатическая теория в принципе может быть применима.

Как уже отмечалось в работе [22], где рассматривалось изменение только коэффициента квадратичной нелинейности с расстоянием, в рамках адиабатической теории амплитуда солитона, близкого к предельному, падает с расстоянием практически по линейному закону, а солитон все время остается предельным. Подобное поведение амплитуды предельного солитона наблюдается и в том случае, когда по мере распространения солитона меняются все коэффициенты уравнения Гарднера (кривая 5 на рис. 4).

Солитоны с малой начальной амплитудой (кривые 1–2 на рис. 4) сначала ведут себя как солитоны Кортевега–де Вриза, но с уменьшением глубины их форма приближается к предельной, и далее падение амплитуды продолжается по линейному закону. Безусловно, с приближением к точке нулевой нелинейности ширина солитона в адиабатической теории растет неограниченно, и,

начиная с какого-то момента, адиабатическая теория в принципе неприменима.

Качественно изменение амплитуды солитона в рамках адиабатической теории в ситуации, когда меняются все параметры модельного уравнения (1), очень похоже на изменение амплитуды, когда меняется только параметр квадратичной нелинейности [22]. Следует отметить, что именно параметр квадратичной нелинейности определяет поведение солитона при подходе к точке переворота.

Далее пределы применения адиабатической теории оцениваются на основе сравнения с результатами численного моделирования распространения солитона как в рамках асимптотического уравнения Гарднера, так и в рамках уравнений Эйлера.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Численное моделирование проводилось для условий, описанных выше. При задании в рамках уравнений Эйлера начальных солитоноподобных импульсов (солитоны уравнения Гарднера) наклонное дно сшивалось с ровным участком дна, на котором и задавался начальный импульс. Начальные амплитуды солитоноподобных импульсов также выбирались в соответствии с указанными выше (–3.3 м, –7.3 м, –9.7 м, –12.9 м, –17.5 м). Самая большая ширина начального импульса составила около 453.6 м, что много меньше масштаба неоднородности среды (1.1% от расстояния до точки переворота). Моделирование трансформации солитонов делалось также в рамках численной модели, основанной на уравнении Гарднера. На рис. 5 приведены результаты моделирования солитонов с начальными амплитудами –3.3 м, –9.7 м и –17.5 м (в рамках обеих моделей). Здесь сплошной линией показана трансформация начального солитона, рассчитанного на основе уравнения Гарднера, а пунктирной линией – та же трансформация в полнонелинейной модели Эйлера. В уравнении Гарднера (1) координата x является эволюционной переменной и импульс, рассчитанный по эволюционной модели, показан на временной оси, расположенной сверху, в точках x , значения которых указаны на оси x внизу. В полнонелинейной модели в тех же самых точках x выводится временная запись волны, которая также приведена на рисунке. Для наглядности толстой сплошной линией показано положение дна относительно оси x .

Во всех трех случаях волна в модели Гарднера движется быстрее, чем в полнонелинейной модели, что отмечалось также в работах [30, 31].

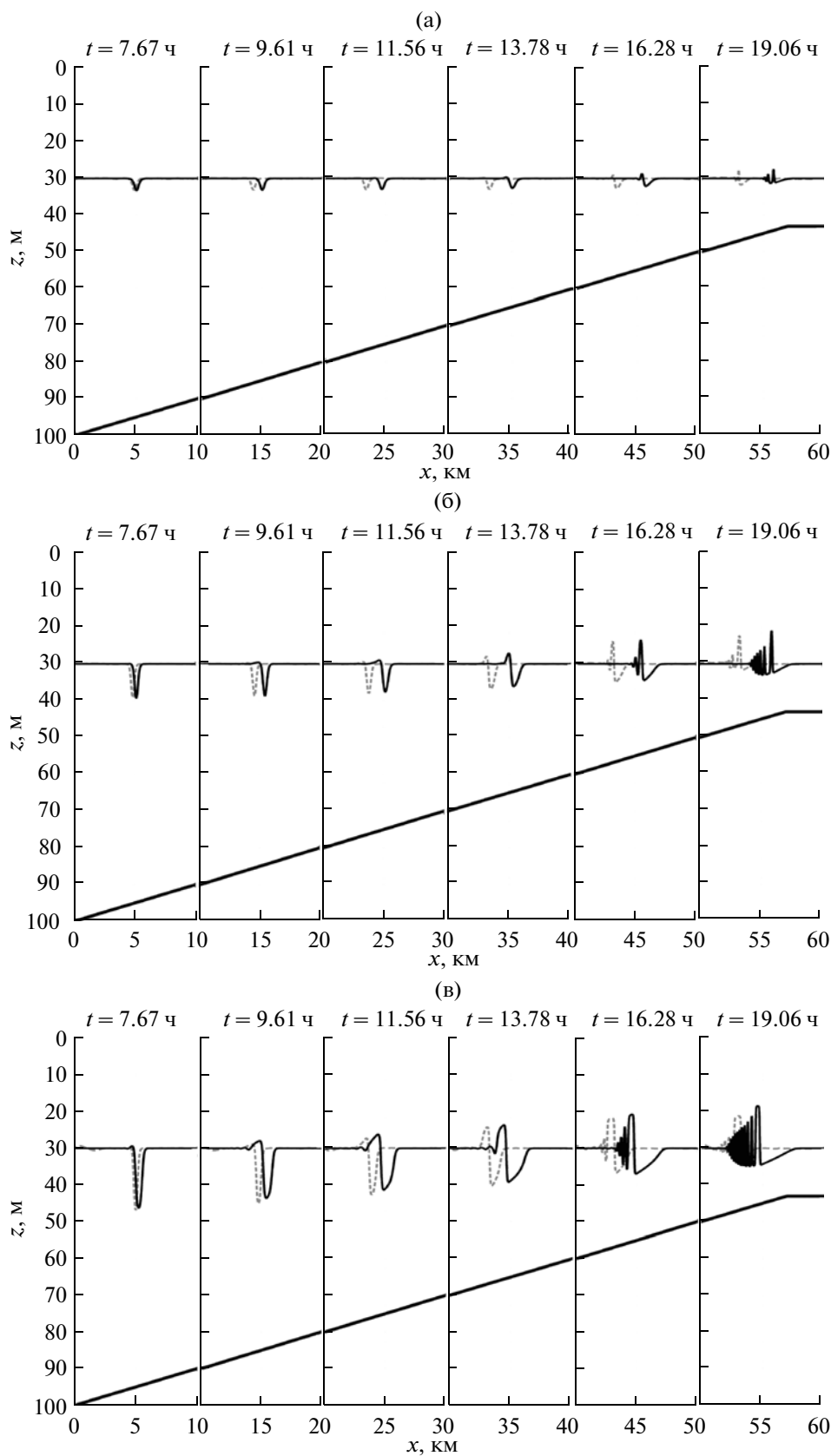


Рис. 5. Трансформация солитона, с начальными амплитудами 3.3 м (а), 9.7 м (б) и 17.5 м (в) в полнонелинейной модели (пунктирная линия) и в рамках модели Гарднера (сплошная линия) при переходе через точку нулевой квадратичной нелинейности.

Чем выше амплитуда начального солитона, тем раньше он теряет солитонную форму, генерируя положительную “полочку” до точки переворота (40 км) в рамках обеих численных моделей. Эта полочка имеет большую высоту в модели Гарднера, чем в полнонелинейной модели.

Изначально толстый солитон с амплитудой 17.5 м практически сразу, через 5 км, генерирует заметную полочку и теряет солитонную форму. После точки переворота (40 км) начинается генерация вторичных солитонов положительной полярности, которая происходит тем быстрее, чем выше амплитуда начального солитона. Из начального толстого солитона (рис. 5в) вторичный положительный солитон также становится толстым, что отмечалось уже в работе [22]. Число вторичных солитонов в модели Гарднера выше, чем в полнонелинейной модели во всех случаях. Также во всех случаях амплитуда отрицательной части импульса выше в полнонелинейной модели, а амплитуда вторичных солитонов выше в модели Гарднера.

Сравнение изменений амплитуд солитонов для аналитической и численных моделей приведено на рис. 6. Распространение солитона с наименьшей амплитудой, равной 3.3 м (рис. 6а), описывается адиабатической теорией на протяжении первых 20 км, т.е. до половины расстояния до точки переворота. На больших расстояниях волна перестает быть солитоном, что видно и на рис. 5, где после 20 км заметна положительная полочка за солитоном. Кривые, соответствующие аналитической и обеим численным моделям расходятся, но обе численные модели показывают отличное совпадение между собой.

Солитон с начальной амплитудой 7.3 м имеет меньшую ширину, чем солитон с амплитудой 3.3 м (см. рис. 3) и также распространяется адиабатически на расстояние уже 15 км (рис. 6б), т.е. только треть пути до точки переворота. После этого кривые расходятся, но, как и в первом случае, обе численные модели дают очень хорошее совпадение в зависимостях амплитуды волны от расстояния до точки переворота. Можно утверждать, что сценарий изменения импульса в этом случае умеренной амплитуды, реализуемый в полнонелинейной модели, очень хорошо описывается приближенной моделью Гарднера, что отмечалось ранее в работах [30–32].

Солитон с начальной амплитудой 9.7 м (рис. 6в) наиболее узкий в данной конфигурации. Казалось бы, что более узкий импульс должен распространяться адиабатически на более далекие расстояния, однако по результатам моделирования он распространяется адиабатически на еще мень-

шее расстояние, только 12–13 км. При этом форма импульса сильно отличается от солитонной. (рис. 5в). Численные модели здесь начинают существенно расходиться, начиная с расстояния 20 км, причем амплитуда волны в полнонелинейной модели превышает амплитуду волны в модели Гарднера в соответствующих точках. Следует отметить, что расхождение между моделями составляет 5–7%, и к точке переворота кривые опять сходятся.

Солитон с начальной амплитудой 12.9 м (рис. 6г) адиабатически проходит только 5 км. Через 7–8 км численные модели начинают расходиться, и, как в предыдущем случае, модель Гарднера дает меньшие значения амплитуды отрицательной части волны в соответствующих точках, чем полнонелинейная модель. Расхождение между моделями составляет не более 7%, и к точке переворота кривые опять практически сходятся.

Наконец, солитон с начальной амплитудой 17.5 м уже в начале пути по конфигурации отличается от солитона и практически сразу, через 5 километров, “сходит” с адиабатического распространения (рис. 6д). Еще через 5 километров начинают расходиться и численные кривые, которые снова совпадают в точке переворота, как и в предыдущем случае.

Итак, даже вдали от точек переворота, где коэффициент квадратичной нелинейности меняет знак, и при достаточно плавном изменении глубины адиабатическое распространение солитона имеет место в весьма ограниченной области, размер которой резко падает с приближением формы солитона к толстому солитону. Это объясняется тем, что в солитоне Гарднера присутствуют два характерных масштаба – масштаб “кинков”, представляющих передний и задний фронт солитона, и собственно ширина самого солитона, т.е. расстояние между кинками. Динамика толстых солитонов с точки зрения теории кинков подробно рассмотрена в [33–35]. В плавно неоднородной среде солитон может существовать как единое целое и быть описан одной формулой, если расстояние между кинками стремится к нулю и их скорость одинакова. В этом случае солитон достаточно далек от толстого солитона. С ростом амплитуды солитон в неоднородной среде перестает быть единым целым, и его трансформация есть трансформация каждого кинка в отдельности. Этот процесс хорошо показан в работе [27]. В этом случае адиабатическая теория трансформации солитона как единого импульса не применима.

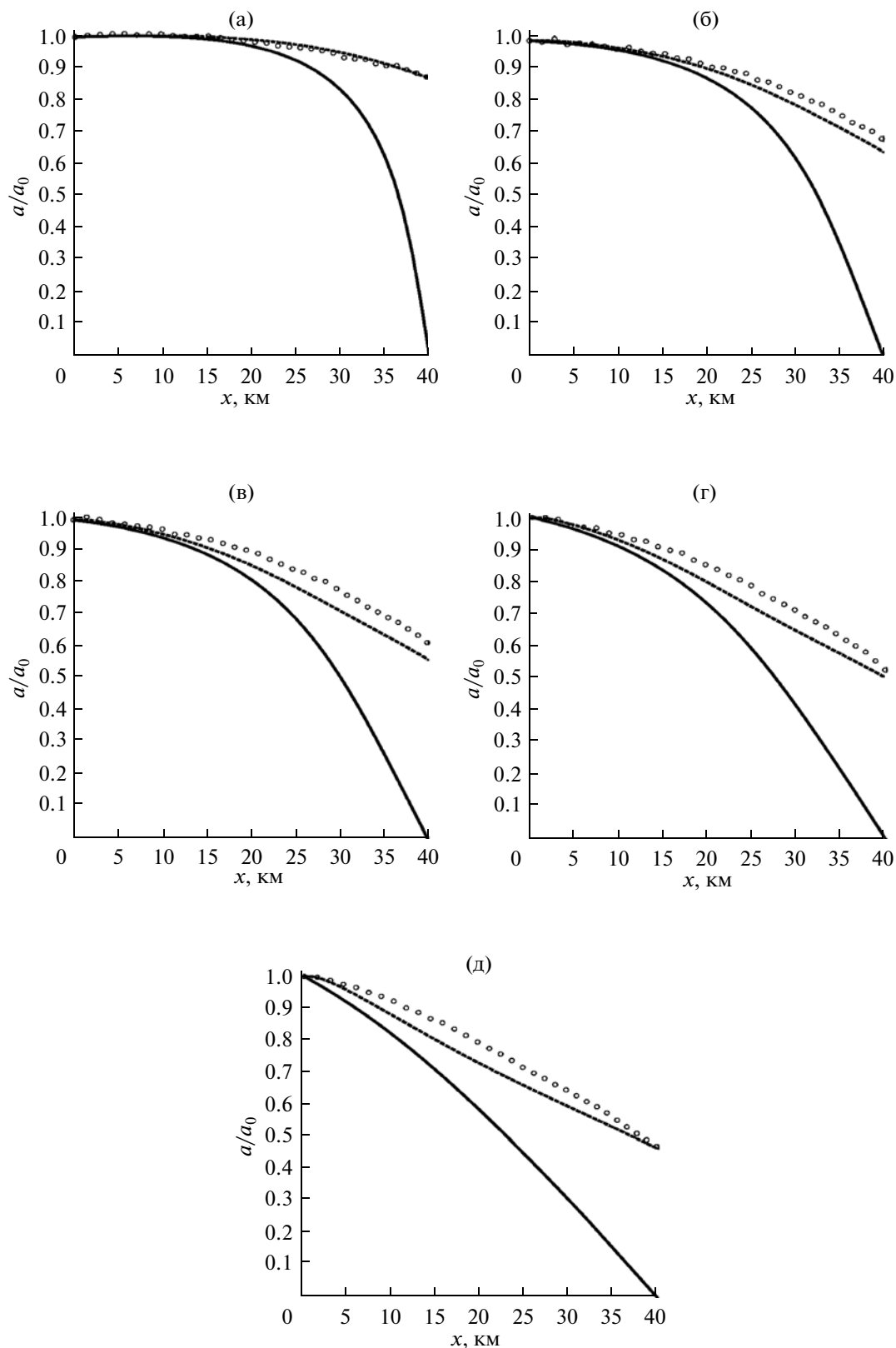


Рис. 6. Изменение амплитуды распространяющегося солитона, нормированной на начальную амплитуду $a_0 = 3.3$ м (а), 7.3 м (б), 9.7 м (в), 12.9 м (г), 17.5 м (д) с расстоянием до точки переворота. Адиабатическая теория – сплошная линия, полнонелинейная модель – точки, модель Гарднера – пунктирная линия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках трех моделей — адиабатической, модели Гарднера и полнонелинейной модели проведено сравнение трансформации солитонов внутренних волн различных амплитуд в бассейне с наклонным дном и двухслойной стратификацией. Найдено, что адиабатическое распространение солитона имеет место в ограниченной области. Чем выше амплитуда начального солитона, тем быстрее он теряет солитонную форму, генерируя за собой “полочку” противоположной полярности. С приближением амплитуды к предельной, солитон в неоднородной среде перестает быть единым образованием, и его фронты (кинки) имеют собственную динамику. В этом случае адиабатическая теория становится неприменимой, и импульс теряет форму солитона.

Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (№ 14.В37.21.0611), грантов РФФИ (№№ 12-05-00472, 13-05-90424_Укр_ф_а, 13-05-97037_Р_Поволжье), а также проекта Научного фонда НИУ ВШЭ № 12-01-0103.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПОЛНОНЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Система полных уравнений Эйлера, описывающих движение невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости в вертикальной плоскости в приближении Буссинеска, решается численно:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t + \mathbf{U}\nabla\mathbf{U} &= -\nabla p - \rho\mathbf{g}\mathbf{k}, \\ \rho_t + \mathbf{U}\nabla\rho &= 0, \\ \nabla\mathbf{U} &= 0, \\ \rho &= \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Система решается в пространстве размерности $2D$, т.е. все физические величины являются функциями x , z и t . Здесь $\mathbf{U} = (u, w)$ — вектор скорости, u — скорость вдоль горизонтальной оси x , w — скорость вдоль вертикальной оси z , t — время, ρ_f — плотность морской воды, ρ_0 — постоянная характеристическая плотность (в приближении Буссинеска: $\rho_f = \rho_0(1 + \rho)$), ρ — безразмерная поправка плотности, g — гравитационное ускорение.

Пространственная расчетная область имеет горизонтальный размер L и вертикальный размер H . Дно описывается функцией $z = h(x)$, и H — максимальная глубина бассейна. Правая и левая границы являются открытыми. На поверхности океана

используется приближение “твердой крышки” $w = 0$ при $z = 0$. Граничное условие на дне ставится как условие непротекания $v_n = 0$ при $z = -H$, где v_n — скорость по нормали к поверхности. Процедура численного решения системы основана на неявной предиктор-корректорной двухшаговой конечно-разностной схеме.

Инициализация поля плотности в начальный момент времени осуществляется в соответствии со следующим выражением:

$$\rho(x, z, t = 0) = \rho_{\text{mean}}(z - \eta(x, z, t)),$$

где $\rho_{\text{mean}}(z) = -0.005 \tan h\left(\frac{z + z^*}{4}\right)$, $\eta(x, z, t = 0) = F(x)\Phi(z)$, z^* — глубина залегания пикноклина, $\Phi(z)$ — решение краевой задачи для вертикальной структуры моды. Горизонтальное возмущение $F(x)$ задавалось как солитон уравнения Гарднера (4) с нужными параметрами. Горизонтальная и вертикальная составляющие скорости задавались в виде:

$$u(x, z, t = 0) = cF(x)\frac{d\Phi}{dz}, \quad w(x, z, t = 0) = -c\Phi(z)\frac{dF}{dx}.$$

Также задается топография дна $h(x) = 0.001x$. Параметры модели: шаг по вертикали 1 м, по горизонтали 28 м, временной шаг составляет 2 с. Для модели с выбранными параметрами выполняется критерий Куранта–Фридрихса–Леви.

Исследование нелинейной динамики в рамках уравнения Гарднера (1) проведено с помощью численного интегрирования на основе неявной псевдоспектральной схемы [36] с контролем сохранения интегралов массы (2) и энергии (3), неоднократно использовавшейся авторами для решения сходных задач [29, 37–42]. Пространственный интервал выбирался исходя из предполагаемой скорости возмущений и времени эволюции и при необходимости расширялся. Численная схема тестировалась на точных солитонных решениях уравнения Гарднера с постоянными коэффициентами, кроме того, проводилось сопоставление результатов с аналогичными, полученными при удвоенном числе разрешающих точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salusti F., Lascaratos A., Nittis K.* Changes of polarity in marine internal waves: Field evidence in eastern Mediterranean Sea // *Ocean Modelling*. 1989. V. 82. P. 10–11.
2. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T., Barnes B.* A nonlinear model of the internal tide transformation on the Australian North West Shelf // *J. Phys. Ocean.* 1997. V. 27. P. 871–896.

3. *Duda T.F., Lynch J.F., Irish J.D. et al.* Internal tide and nonlinear internal wave behavior at the continental slope in the northern South China Sea // *IEEE J. Oceanic Eng.* 2004. V. 29. P. 1105–1130.
4. *Hsu M.-K., Liu A.K., Liu C.* A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR // *Cont. Shelf Res.* 2000. V. 20. P. 389–410.
5. *Liu A.K., Chang Y.S., Hsu M.-K., Liang N.K.* Evolution of nonlinear internal waves in the East and South China Seas // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. P. 7995–8008.
6. *Orr M.H., Mignerey P.C.* Nonlinear internal waves in the South China Sea: Observation of the conversion of depression internal waves to elevation internal waves // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108 № C3. P. 3064.
7. *Ramp S.R., Tang T.Y., Duda T.F. et al.* Internal solitons in the northeastern South China Sea. Part I: sources and deep water propagation // *IEEE J. Oceanic Eng.* 2004. V. 29. P. 1157–1181.
8. *Yang Y.-J., Tang T.Y., Chang M.H., et al.* Solitons northeast of Tung-Sha Island during the ASIAEX pilot studies // *IEEE J. Oceanic Eng.* 2004. V. 29. P. 1182–1199.
9. *Zhao Zh., Klemas V., Zheng Q. et al.* Satellite observation of internal solitary waves converting polarity // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30. P. 1988.
10. *Zhao Zh., Klemas V., Zheng Q. et al.* Estimating parameters of a two-layer stratified ocean from polarity conversion of internal solitary waves observed in satellite SAR images // *Rem. Sens. Environ.* 2004. V. 92. P. 276287.
11. *Zheng Q., Klemas V., Zheng Q., Yan X.-H.* Satellite observation of internal solitary waves converting polarity // *Geophys. Res. Lett.* 2003. V. 30. № 19. P. 1–4.
12. *Shroyer E.L., Moum J.N., Nash J.D.* Observations of Polarity Reversal in Shoaling Nonlinear Internal Waves // *JPO.* 2009. V. 39. P. 691–701.
13. *Shroyer E.L., Moum J.N., Nash J.D.* Energy transformations and dissipation of nonlinear internal waves over New Jersey's continental shelf // *Nonlinear processes in Geophysics.* 2010. V. 17. P. 345–360.
14. *Bourgault D., Blokhina M.D., Mirshak R., Kelley D.E.* Evolution of a shoaling internal solitary wavetrain // *Geophys. Res. Lett.* 2007. V. 34. P. L03601.
15. *Серебряный А.Н., Пао Х.П.* Переход нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // *ДАН.* 2008. Т. 420. № 4. С. 543–547.
16. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T.* A generalised Korteweg-de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104. P. 18333–18350.
17. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Kurkin A.* Simulation of the transformation of internal solitary waves on oceanic shelves // *J. Phys. Ocean.* 2004. V. 34. P. 2774–2779.
18. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Modeling internal solitary waves in the coastal ocean // *Surv. Geophys.* 2007. V. 28. P. 273–298.
19. *Vlasenko V., Stashchuk N.* Three-dimensional shoaling of large amplitude internal waves // *J. Geophys. Res.* 2007. V. 112. P. C11018.
20. *Vlasenko V., Hutter K.* Transformation and disintegration of strongly nonlinear internal waves by topography in stratified lakes // *Annal. Geophys.* 2002. V. 20. P. 2087–2103.
21. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Solitary wave transformation due to a change in polarity // *Stud. Appl. Math.* 1998. V. 101. P. 357–388.
22. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Solitary wave transformation in a medium with sign-variable quadratic nonlinearity and cubic nonlinearity // *Physica D.* 1999. V. 132. P. 40 – 62.
23. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Stepanyants Y., Talipova T.* Modelling internal solitary waves on the Australian NorthWest Shelf // *Marine and Freshwater Res.* 2006. V. 57. P. 265–272.
24. *Vlasenko V.I., Ostrovsky L.A., Hutter K.* Adiabatic behaviour of strongly nonlinear internal solitary waves in slope-shelf areas // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110. P. C04006.
25. *Knickerbocker C.J., Newell A.C.* Internal solitary waves near a turning point // *Phys. Lett A.* 1978. V. 75A. P. 326–330.
26. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Гримшоу Р.* Трансформация солитона через точку нулевой нелинейности // *Письма в ЖЭТФ.* 1997. V. 65. P. 120–125.
27. *Nakoulima O., Zahibo N., Pelinovsky E. et al.* Analytical and numerical studies of the variable-coefficient Gardner equation // *Appl. Math. Comp.* 2004. V. 152. P. 449–471.
28. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Ламб К. и др.* Эффекты кубической нелинейности при распространении интенсивных внутренних волн // *ДАН.* 1999. Т. 364. № 6. С. 824–827.
29. *Grimshaw R., Talipova T., Pelinovsky E., Kurkina O.* Internal solitary waves: propagation, deformation and disintegration // *Nonlin. Proc. Geophys.* 2010. P. 633–649.
30. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R. et al.* Internal solitary wave transformation at the bottom step in two-layer flow: the Gardner and Navier-Stokes frameworks // *Nonlin. Proc. Geophys.* 2009. V. 16. P. 33–42.
31. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R. et al.* Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a Bottom step // *Phys. Fluids.* 2010. V. 22. P. 076602.
32. *Talipova T., Terletska K., Maderich V. et al.* Internal solitary wave transformation over the bottom step: loss of energy // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25. P. 032110.
33. *Горшков К.А., Соустова И.А.* Взаимодействие солитонов как составных структур в модели Гарднера // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2001. Т. XLIV. № 5–6. С. 502.
34. *Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Irisov V.G.* Perturbation theory for kinks and application for multi-soliton interactions in hydrodynamics // *Phys. Rev. E.* 2004. V. 69. P. 1–10.

35. Горшков К.А., Соустова И.А., Ермошкин А.В., Зайцева Н.В. О приближенном описании неквазистационарной эволюции солитонов внутренних волн, близких к предельным, в рамках уравнения Гарднера с переменными коэффициентами // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2013. Т. 6. № 3.
36. *Fornberg B.* A Practical Guide to Pseudospectral Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 231 p.
37. Куркин А.А., Полухина О.Е. Численные эксперименты по распространению волн Россби в океане // *Изв. Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 4. С. 99–116.
38. Куркин А.А., Полухина О.Е. Нелинейная фокусировка аномальных волн Россби в океане: численные эксперименты // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2005. Т. 41. С. 93–101.
39. Полухина О.Е., Самарина Н.М. Цилиндрическая расходимость уединенных внутренних волн в рамках обобщенного уравнения Гарднера // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2007. Т. 43. № 6. С. 818–825.
40. *Pelinovsky E., Polukhina O., Slunyaev A., Talipova T.* Internal solitary waves // *Solitary Waves in Fluids*. Southampton, Boston: WIT Press. 2007. P. 85–110.
41. *Kurkina O.E., Kurkin A.A., Soomere T. et al.* Higher-order (2 + 4) Korteweg-de Vries – like equation for interfacial waves in a symmetric three-layer fluid // *Phys. Fluids*. 2011. V. 23. Issue. 11. P. 116602-1–13.
42. *Kurkina O.E., Kurkin A.A., Ruvinskaya E.A. и др.* Динамика солитонов неинтегрируемой версии модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза // *Письма в ЖЭТФ*. 2012. Т. 95. № 2. С. 98–103.

Propagation of Solitary Internal Waves in Two-Layer Ocean of Variable Depth

T. G. Talipova^{a, b}, O. E. Kurkina^{b, c}, E. A. Rouvinskaya^b, and E. N. Pelinovsky^{a, b, c}

^a *Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences,
ul. Ul'yanova 46, Nizhny Novgorod, 603950 Russia
e-mails: tgtalipova@mail.ru, pelinovsky@gmail.com*

^b *Nizhni Novgorod State Technical University, ul. Minina 24, Nizhni Novgorod, 603950 Russia*

^c *Higher School of Economics National Research University,
ul. Bol'shaya Pecherskaya 25/12, Nizhni Novgorod, 603155 Russia*

Received September 6, 2013; in final form October 9, 2013

Abstract—The propagation of internal solitons of moderate amplitude in a two-layer ocean of variable depth is studied in terms of the Gardner and Euler equations. An analytical solution is obtained with the use of asymptotic expansions on a small parameter (bottom slope). The theoretical results are compared with the numerical modeling results. The possibility of soliton shape preservation during pulse propagation is discussed. It is obtained that, as the initial amplitude increases, the pulse deviates from the soliton shape more rapidly.

Keywords: internal waves, two-layer ocean, Euler equations, Gardner equation, soliton.