

УДК 551.466

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В МЕЛКОВОДНОМ БАССЕЙНЕ

^{1,2}Родин А.А., ^{1,2}Диденкулова И.И., ^{1,3}Пелиновский Е.Н.

¹Нижегородский государственный технический университет, Нижний Новгород;

²Институт кибернетики, Таллинский технологический университет, Таллин;

³Национальный исследовательский университет – Высшая школа экономики,
Нижний Новгород, e-mail: pelinovsky@gmail.com

В данной статье проведено исследование процесса взаимодействия и трансформации двух уединенных волн (импульсов) различной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины в приближении мелкой воды. Такое взаимодействие, в частности, между падающей и отраженной волнами часто наблюдается в прибрежной зоне моря при подходе волн к крутому береговому склону. Рассмотрено взаимодействие как ридмановых, так и ударных волн положительной полярности и обсуждены основные особенности взаимодействия волн разных типов. Основные результаты получены в рамках гиперболической системы, описывающей уравнения нелинейной теории мелкой воды. Рассчитаны максимумы смещения водной поверхности в момент взаимодействия ударных волн. При малых амплитудах рассчитанные величины хорошо описываются результатами аналитической теории для взаимодействующих ридмановых волн. В случае обрушения из-за диссипации энергии на фронте ударных волн толщина потока становится меньше, чем предсказывается теорией для ридмановых волн и полностью развитого бора.

Ключевые слова: уединенные волны большой амплитуды, взаимодействие волн, численное моделирование, нелинейная теория мелкой воды

INTERACTION OF LARGE-AMPLITUDE SOLITARY WAVES IN SHALLOW-WATER BASIN

^{1,2}Rodin A.A., ^{1,2}Didenkulova I.I., ^{1,3}Pelinovsky E.N.

¹Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod;

²Institute of Cybernetics, Tallinn University of Technology, Tallinn;

³National Research University – Higher School of Economics,
Nizhny Novgorod, e-mail: pelinovsky@gmail.com

Interaction of large-amplitude solitary waves in shallow-water basin. A.A. Rodin, I.I. Didenkulova, E.N. Pelinovsky. In this paper the process of transformation and interaction of two solitary waves (impulses) in the fluid of finite depth is studied in the framework of nonlinear shallow water theory. Such interaction between incident and reflected waves is often observed in the coastal region, if the wave approaches the steep coast. Interaction of Riemann and shock waves of positive polarities is considered and peculiarities of wave interaction for different waves are discussed. The main results are obtained within the hyperbolic system describing nonlinear shallow water equations. Maxima of water surface elevations at the moment of wave interactions are calculated. For small-amplitude waves, they are also well-described analytically by the theory of Riemann wave interaction. In the case of the wave breaking, due to the energy dissipation at the front of the shock wave, the flow depth becomes smaller than it is predicted by the theory of the Riemann wave interaction and a fully-developed bore.

Keywords: large-amplitude solitary waves, wave interaction, numerical simulation, nonlinear shallow-water theory

Процесс нелинейной трансформации гравитационной поверхностной волны на мелкой воде рассматривается в работах многих авторов [1–3, 6–8, 10–11, 14]. Этот процесс, приводящий к опрокидыванию волны и последующему образованию ударной волны (бора), часто наблюдается в прибрежной зоне моря и при вхождении приливной волны в устье реки [4, 13]. Динамика самой обрушенной волны изучена меньше. Аналитические результаты известны для развитого бора, в котором скорости течения по обе стороны от скачка стремятся к константам [1, 8, 10]. Часто при подходе волн к крутому береговому склону имеет место взаимодействие падающей и отраженной волн, которое еще не рассматривалось в литературе. Именно эта проблема изучается в данной статье.

Математическая модель

Гиперболическая система уравнений нелинейной теории мелкой воды имеет вид [1, 8, 10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [Hu] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $H(x, t) = h + \eta(x, t)$ – полная глубина, отсчитываемая от дна; $\eta(x, t)$ – возмущение водной поверхности над невозмущенной глубиной бассейна h ; u – усредненная по глубине горизонтальная скорость водного потока; g – ускорение силы тяжести. В данной работе система уравнений (1) решается численно с помощью программного па-

кета CLAWPACK (www.amath.washington.edu/~claw), использующего метод конечных объемов [12]. Глубина бассейна h постоянна и во всех расчетах выбрана равной 1 м. Граничные условия на границах расчетной области соответствуют свободному уходу волны через границу. Размер пространственного шага – 0,5 м, временного – 2 с. Начальные условия соответствуют двум ридмановым волнам, двигающимся навстречу друг другу:

$$H(x, t) = H_+(x, t) + H_-(x, t);$$

$$u(x, t) = u_+(x, t) + u_-(x, t), \quad (2)$$

где $H_{\pm}(x, t) = H_{0\pm} [x \mp V(H_{\pm})t]$;

$$u_{\pm} = \pm 2 \left(\sqrt{gH_{\pm}} - \sqrt{gh} \right);$$

$$V = 3\sqrt{gH_{\pm}} - 2\sqrt{gh}. \quad (3)$$

В начальный момент времени уединенные волны расположены симметрично относительно начала координат на рассто-

янии 2,6 км друг от друга. Форма уединенной волны выбрана гауссовой

$$H_{0\pm} = h + A_{\pm} \exp \left[-\frac{4(x \pm x_0)^2}{\lambda_{\pm}^2} \right]. \quad (4)$$

Здесь A_{\pm} – амплитуды импульсов; λ_{\pm} – их характерные длины; x_0 характеризует расстояние от начала координат до каждого из импульсов. В расчетах характерные длины импульсов (λ) выбраны одинаковыми и равными 0,9 км. В численных расчетах контролировалось сохранение массы, и ошибка не превышала $10^{-6}\%$.

Взаимодействие двух импульсов

Рассмотрим теперь результаты расчетов с данными начальными условиями. Рис. 1 иллюстрирует процесс взаимодействия двух уединенных волн амплитудой 0,1 м. В этом случае параметр нелинейности, определяемый отношением амплитуды волны к глубине бассейна, достаточно мал (0,1), и столкновение волн произойдет до того, как начнут образовываться ударные фронты.

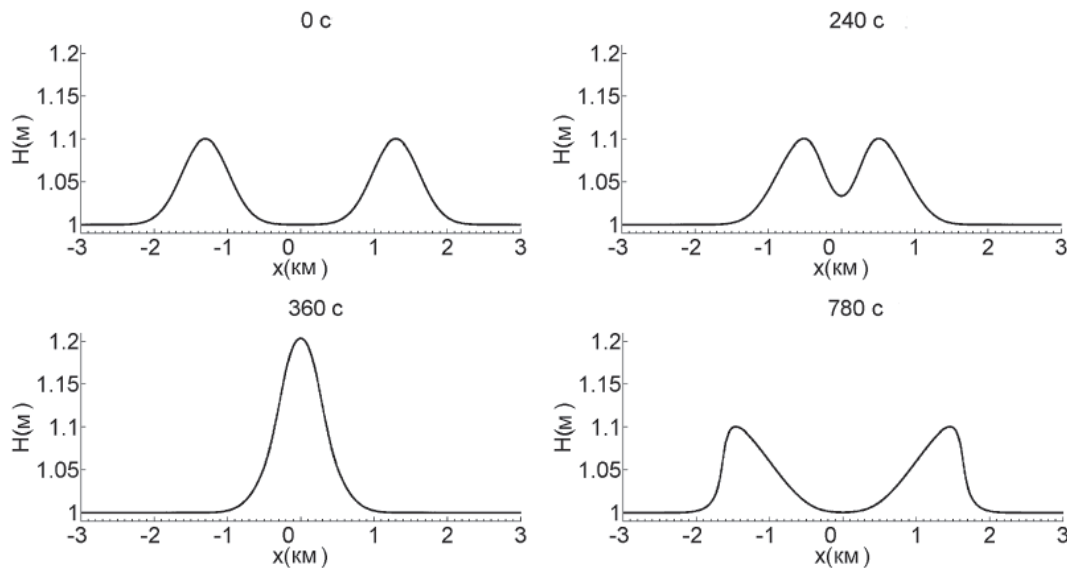


Рис. 1. Взаимодействие двух уединенных волн с амплитудой 0,1 м (слабонелинейный случай)

В численном эксперименте максимум амплитуды при взаимодействии волн составил 0,2 м, что хорошо согласуется с линейной теорией. Взаимодействие ридмановых волн одинаковой амплитуды исследовалось аналитически также в работе [5]

$$H_{ст} = 4 \cdot \left[1 + \frac{A_{нач}}{h} - \sqrt{1 + \frac{A_{нач}}{h}} \right], \quad (5)$$

где $A_{нач}$ – амплитуда волны непосредственно перед столкновением. В момент взаи-

модействия высота результирующей волны $H_{ст}$ оценивается в 0,2 м по формуле (5), что полностью соответствует результатам численного эксперимента. Зависимость максимального значения поля от времени демонстрирует рис. 2, из которого видно, что падение амплитуды, связанное с возникновением скачка, началось только с момента времени $T \sim 1600$ с. Этот факт еще раз подтверждает, что взаимодействие ридмановых волн происходило до образования ударных фронтов.

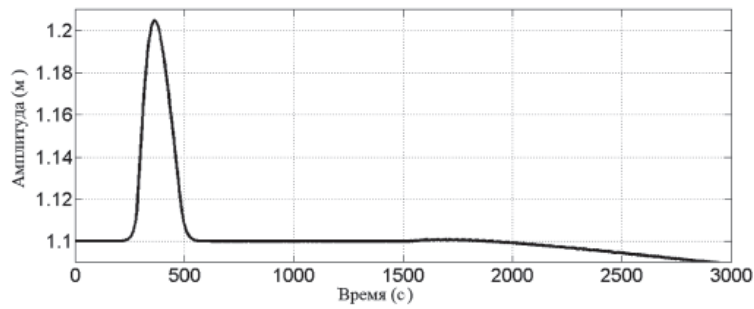


Рис. 2. Зависимость максимального значения толщины потока от времени ($A_0 = 0,1$ м)

Взаимодействие волн большей амплитуды ($A = 0,4$ м) показано на рис. 3. Здесь волны успевают столкнуться также до того, как об-

разуются ударные фронты (6–7 мин). Максимум смещения в момент взаимодействия составляет 0,87 м, что совпадает с оценкой (5).

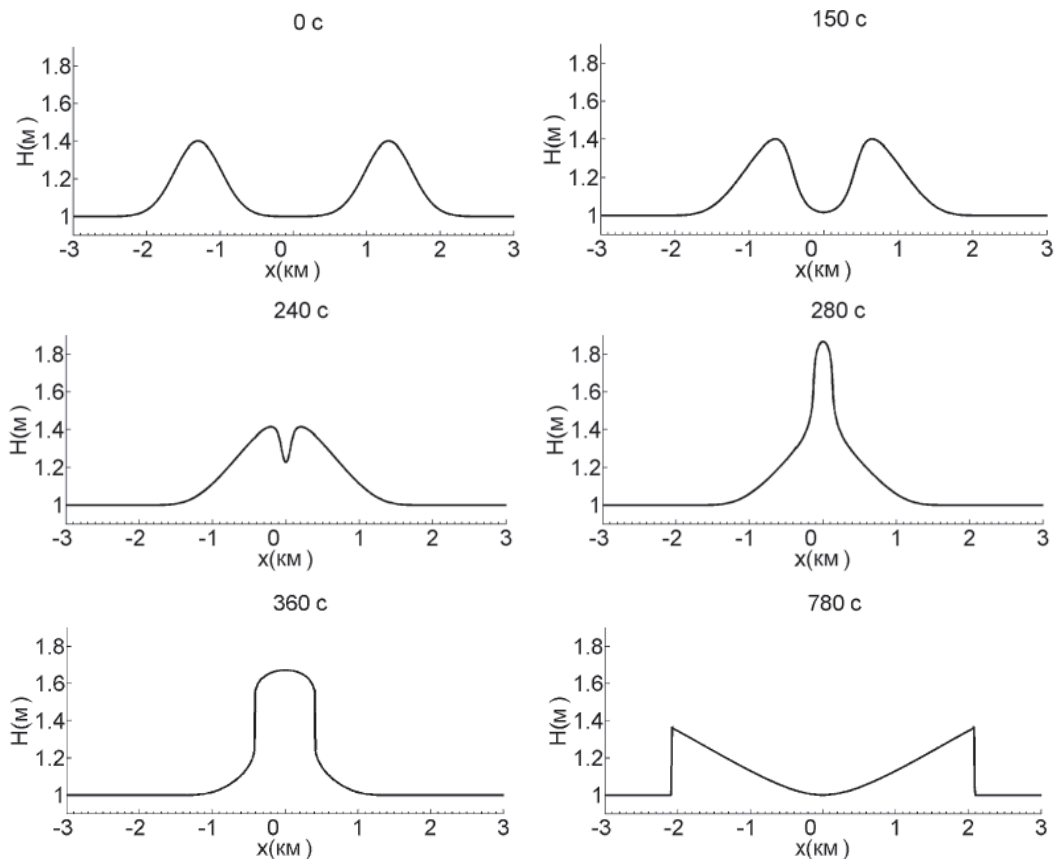


Рис. 3. Взаимодействие двух уединенных волн с амплитудой 0,4 м

Теперь рассмотрим случаи столкновения волн с ударными фронтами (рис. 4). Для этого увеличим амплитуду начальных импульсов до 0,9 м, а расстояние между ними – до 6,6 км. К моменту столкновения ударный фронт на каждой волне успевает сформироваться полностью, и высота волн начинает падать (рис. 5), так что амплитуды обеих волн непосредственно перед взаимодействием равны 0,7 м, то есть на 0,2 м меньше, чем начальные значения.

Для теоретической оценки высоты «пика» при столкновении ударных волн

воспользуемся законами сохранения массы и момента [1, 8, 10]:

$$(c-u)(h+\xi_0) = ch;$$

$$u(c-u)(h+\xi_0) - \frac{g}{2}(h+\xi_0)^2 = -\frac{gh^2}{2}; \quad (6)$$

$$\bar{c}(h+\xi_r) = (\bar{c}-u)(h+\xi_0);$$

$$-\frac{g}{2}(h+\xi_r)^2 = -\frac{g}{2}(h+\xi_0)^2 + u(\bar{c}-u)(h+\xi_0),$$

где c – скорость движения подходящего бора; u – скорость потока за фронтом

ударной волны; \bar{c} – скорость бора после взаимодействия; ξ_0 – начальная высота возмущения, а ξ_r – искомая нами высота потока в момент взаимодействия. Эта система хорошо аппроксимирует случаи взаимодействия ударных волн относительно большой амплитуды ($\xi_0 \geq 3h$). В случае же бора малой амплитуды поток становится неустойчивым, и для его описания надо пользоваться теорией волнообразного бора [9]. Максимум толщины потока в момент взаимодействия составляет 2,6 м. Если вычесть невозмущенную глубину в 1 м, то получаем оценку высоты волны в момент столкновения 1,6 м. Высота необрушенной волны, вычисляемая по формуле (5) с та-

кими начальными условиями будет равна также 1,6 м, а высота бесконечного бора по формуле (6) – 1,60 м. Линейная же теория предсказывает 1,4 м. Различие с предсказаниями нелинейной теории связано с «переходной» формой ударной волны, которая не может быть описана формой развитого бора. Так как ударный фронт был сформирован до взаимодействия импульсов, то и распределение максимума поля смещения будет иметь форму ассиметричного треугольника. Видно, что обрушение волны, а соответственно и спад амплитуды, начало происходить в момент времени 200 с, тогда как столкновение волн произошло только спустя 590 с.

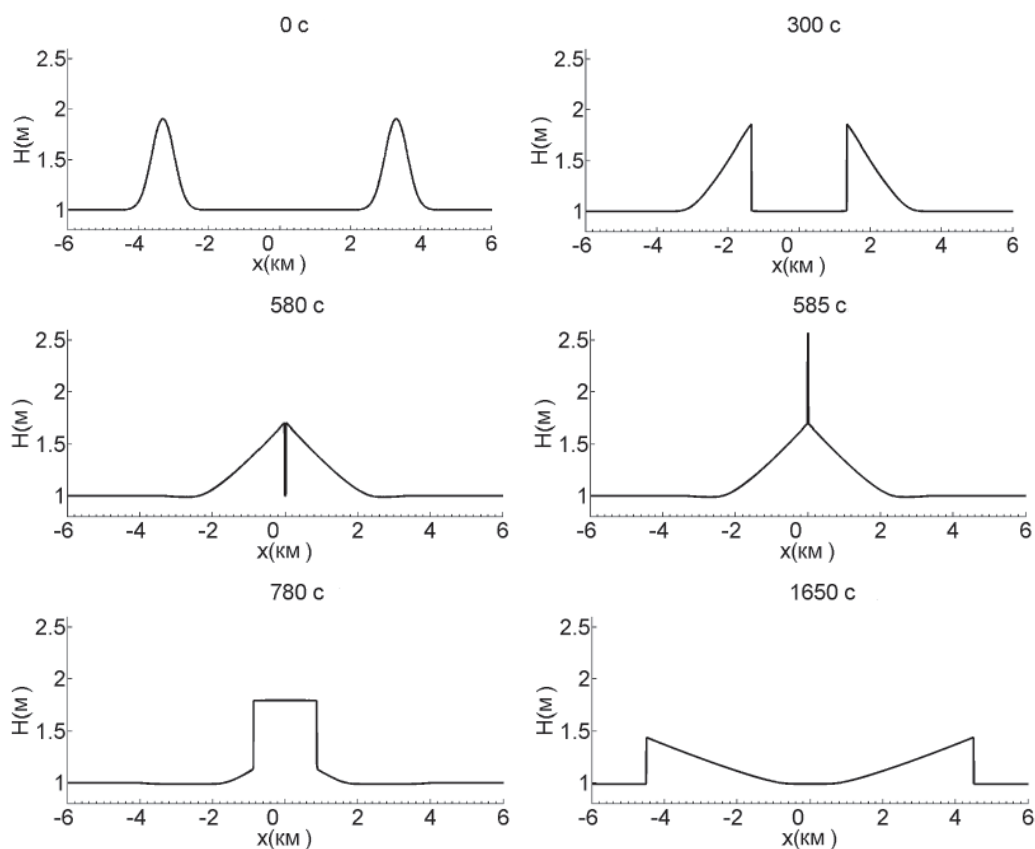


Рис. 4. Взаимодействие двух уединенных волн с начальной амплитудой 0,9 м

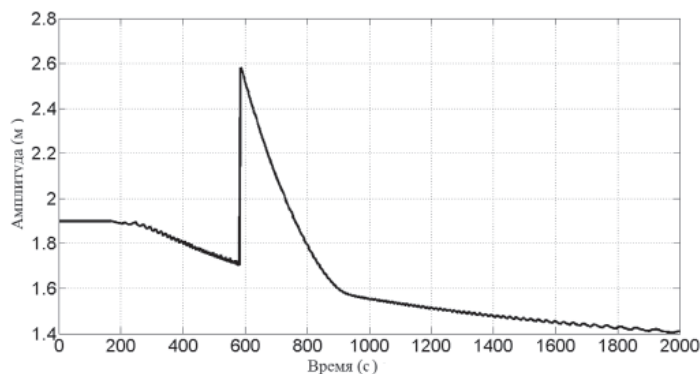


Рис. 5. Зависимость максимальной величины толщины водного потока от времени ($A_0 = 0,9$ м)

Заключение

В работе исследованы случаи взаимодействия уединенных поверхностных гравитационных волн положительной полярности на поверхности жидкости малой глубины. Рассчитаны максимумы смещения водной поверхности в момент взаимодействия ударных волн. При малых амплитудах рассчитанные величины хорошо описываются результатами аналитической теории для взаимодействующих римановых волн. В случае обрушения из-за диссипации энергии на фронте ударных волн толщина потока становится меньшей, чем предсказывается теорией для римановых волн и полностью развитого бора.

Представленные результаты научно-исследовательской работы получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, а также при поддержке грантов МК1440.2012.5, РФФИ 11-05-970006, SF0140007s11 и ETF8870.

Список литературы

1. Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. – Л.: Гидрометеоздат, 1989. – 272 с.
2. Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье / И.И. Диденкулова, Н. Заибо, А.А. Куркин, Е.Н. Пелиновский // Изв. РАН Физика атмосферы и океана. – 2006. – Т. 42, № 6. – С. 839–842.
3. Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н., Родин А.А. Формирование экстремальных волн на мелкой воде с учетом обрушения // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 89–98.
4. Накамура С. О гидравлическом боре и применении результатов его изучения к проблеме возникновения и распространения цунами // Волны цунами: труды СахКНИИ). – Южно-Сахалинск, 1973. – № 32. – С. 129–151.
5. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. – 276 с.
6. Пелиновский Е.Н., Родин А.А. Нелинейная деформация волны большой амплитуды на мелководье // Доклады РАН. – 2011. – Т. 438, № 3. – С. 337–340.
7. Пелиновский Е.Н., Родин А.А. Трансформация сильно нелинейной волны в мелководном бассейне // Изв. РАН Физика атмосферы и океана. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 343–349.
8. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. – М.: ИЛ, 1959. – 618 с.
9. Chanson H. Tidal Bores, Aegir, Eagre, Mascaret, Pororoca: Theory and Observations // World Scientific. – 2012. – 201 p.
10. Courant R., Friedrichs K.O. Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers. – New York, 1999. – 464 p.
11. Didenkulova I., Pelinovsky E., Rodin A. Nonlinear interaction of large-amplitude unidirectional waves in shallow waters // Estonian Journal of Engineering. – 2011. – Vol. 17, №4. – P. 289–300.
12. LeVeque R.J. Finite-volume methods for hyperbolic problems // Cambridge Univ. Press. – 2004. – 559 p.
13. Tsuji Y., Yanuma T., Murata I., Fujiwara C. Tsunami ascending in rivers as an undular bore // Natural Hazards. – 1991. – Vol. 4. – P. 257–266.
14. Zahibo N., Didenkulova I., Kurkin A., Pelinovsky E. Steepness and spectrum of nonlinear deformed shallow water wave // Ocean Engineering. – 2008. – Vol. 35, № 1. – P. 47–52.

References

1. Voltsynger N.E., Klevannyi K.A., Pelinovskiy E.N., Dlinnovolnovaya dinamika pribrezhnoy zony. L.: Gidrometeoizdat, 1989. 272 p.
2. Didenkulova I.I., Zahibo N., Kurkin A.A., Pelinovsky E.N. Steepness and spectrum of a nonlinearly deformed wave on shallow waters. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 2006, Vol. 42, no. 6. pp. 773–776.
3. Didenkulova I.I., Pelinovskiy E.N., Rodin A.A. Formirovanie ekstremalnykh voln na melkoy vode s uchetom obrusheniya. Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika. 2012, Vol. 5, no. 1, pp. 89–98.
4. Nakamura S. O gidravlicheskom bore i primenenii rezultatov ego izucheniya k probleme voznikoveniya i rasprostraneniya tsunami. Volny tsunami (Trudy SakhKNII), Yuzhno-Sakhalinsk, 1973, no. 32. pp. 129–151.
5. Pelinovskiy E.N. Gidrodinamika voln tsunami. Nizhniy Novgorod: IPF RAN, 1996. 276 p.
6. Pelinovskiy E.N., Rodin A.A. Nonlinear deformation of a large-amplitude wave on shallow water. Doklady Physics, 2011, Vol. 56, no. 5, pp. 305–308.
7. Pelinovskiy E.N., Rodin A.A. Transformation of a strongly nonlinear wave in a shallow-water basin. Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics, 2012, Vol. 48, no. 3, pp. 383–390.
8. Stoker J.J. Water Waves The Mathematical Theory With Applications. New York: Interscience Publishers, 1957. 567 p.
9. Chanson H. Tidal Bores, Aegir, Eagre, Mascaret, Pororoca: Theory and Observations. World Scientific, 2012, 201 p.
10. Courant R., Friedrichs K.O. Supersonic Flow and Shock Waves, Interscience Publishers, New York, 1999. 464 p.
11. Didenkulova I., Pelinovsky E., Rodin A. Nonlinear interaction of large-amplitude unidirectional waves in shallow waters. Estonian Journal of Engineering, 2011, Vol. 17, no. 4, pp. 289–300.
12. LeVeque R.J. Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge Univ. Press, 2004. 559 p.
13. Tsuji Y., Yanuma T., Murata I., Fujiwara C. Tsunami ascending in rivers as an undular bore. Natural Hazards, 1991, Vol. 4. pp. 257–266.
14. Zahibo N., Didenkulova I., Kurkin A., Pelinovsky E. Steepness and spectrum of nonlinear deformed shallow water wave. Ocean Engineering. 2008, Vol. 35, no. 1. pp. 47–52.

Рецензенты:

Петрухин Н.С., д.ф.-м.н., профессор кафедры математики, Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород;

Талипова Т.Г., д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород.

Работа поступила в редакцию 26.10.2012.